**Concours STIC/GIC session 2017**

Composition : **Mathématiques 3** (algèbre)

Durée : **4 Heures**

## EXERCICE 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$ , où $n \geq 1$, et u un endomorphisme de E. Pour k entier naturel non nul, $u^k$ est la composée $(u \circ u \circ \ ... \ \circ u)$ où u apparaît k fois ; u° est l'application identique.

Pour un vecteur x de E, on appelle orbite de x selon u le sous-espace vectoriel de E engendré par les images successives de x : $\text{Orb}_u(x) = \text{vect}\left\{x, u(x), u^2(x), \ ... \ , u^{n-1}(x)\right\}$.

L'endomorphisme u est dit cyclique s'il existe un vecteur particulier $x_0$ réalisant l'égalité $E = \text{Orb}_u(x_0)$.

### 1) ETUDE D'UN EXEMPLE

Ici l'espace E est de dimension 4. Après quelques recherches, on a pu déterminer deux vecteurs vérifiant les propriétés suivantes :

- Le vecteur a vérifie :(a, u(a)) est libre et $2u^2(a) - u(a) - a = 0$,
- Le vecteur b vérifie :(b, u(b), $u^2$(b)) est libre et $u^3(b) - u^2(b) + u(b) - b = 0$.

**(a)** Démontrer que la dimension de $\text{Orb}_u(a)$ est égale à 2.

**(b)** Démontrer que la restriction de u à l'orbite de a est diagonalisable et préciser la matrice de cette restriction dans une base de diagonalisation ($e_1$, $e_2$). Enoncer sans démonstration des résultats identiques concernant la restriction de u à l'orbite de b.

**(c)** Montrer que u est diagonalisable.

Par la suite, on notera ($e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$) une base de diagonalisation, $e_1$ étant commun aux deux orbites et $e_2$ étant associé à une valeur propre réelle.

**(d)** Déterminer un vecteur c dont l'orbite est de dimension 3, la restriction de u à cette orbite étant annulée par le polynôme $P(t)=(2t + 1)(t^2 + 1)$.

Exprimer ce vecteur dans la base de diagonalisation.

**(e)** En déduire que l'orbite de a + b n'est pas nécessairement de dimension 4.

**(f)** Préciser un vecteur d tel que l'orbite de b + d soit de dimension 4.

## 2) UNE CONDITION NECESSAIRE

On revient au cas de dimension n, et l'on suppose que l'endomorphisme u est cyclique, $x_0$ étant l'un des vecteurs d'orbite maximale définis dans le préambule, B étant la base $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$

**(a)** Préciser la matrice A de l'application u dans la base B .

**(b)** Préciser la première colonne des matrices $A^k$, k étant un entier compris entre 0 et n-1.

**(c)** En déduire une condition nécessaire portant sur son polynôme minimal pour qu'un endomorphisme soit cyclique.

## EXERCICE 2

### 1-UN EXEMPLE DE REDUCTION SIMULTANEE D'UNE FAMILLE DE MATRICES

Pour tout triplet (a, b, c) appartenant à $IR^3$ , nous notons M(a, b, c) la matrice appartenant à $M_3(IR)$ définie par : $M(a, b, c)=\begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

Nous noterons I=M(1, 0, 0) la matrice unité, J=M(0, 1, 0) et K=M(0, 0, 1).

**1.1** Sans aucun calcul, montrer que J et K sont diagonalisables.

**1.2 Recherche des éléments propres de K**

**1.2.1** Déterminer les valeurs propres de K.

**1.2.2** Pour chaque valeur propre de K, déterminer une base du sous-espace propre associé. Les vecteurs intervenant seront choisis de troisième composante égale à 1.

**1.3 Recherche des éléments propres de J**

**1.3.1** Déterminer les valeurs propres de J.

**1.3.2** Pour chaque valeur propre de J, déterminer une base du sous-espace propre associé.

**1.4 Recherche de vecteurs propres communs à J et K**

**1.4.1** Montrer que : $\mathrm{Vect}((1, 0, 1),(0, 1, 0))=\mathrm{Vect}((1, \sqrt{2}, 1),(1, -\sqrt{2}, 1))$

**1.4.2** En déduire une matrice P inversible appartenant $M_3(IR)$ telle que $P^{-1}$ K P et $P^{-1}$ J P soient diagonales

*(La dernière ligne de P sera constituée uniquement que de 1)*

**1.5** En déduire une base de $IR^3$ permettant pour tout (a, b, c) appartenant à $IR^3$, de diagonaliser la matrice M(a, b, c) et donner une matrice diagonale D semblable à M(a, b, c).

## 2-REDUCTION SIMULTANEE DE DEUX MATRICES DANS LE CAS GENERAL

Considérons deux matrices A et B appartenant à $M_3$(IR).Dans toute cette question, on suppose que A et B sont diagonalisables et que AB = BA.

(E, + ,·) désigne un espace vectoriel de dimension 3, B =($e_1$, $e_2$, $e_3$) désigne une base de E.

Considérons les endomorphismes f et g de E définis par :Mat(f, B )=A et Mat(g, B )=B.

$\mu$ étant une valeur propre de f, $E_\mu(f)$ désigne le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\mu$ de f .

$\lambda$ étant une valeur propre de g, $E_\lambda(g)$ désigne le sous-espace propre de g associé à la valeur propre $\lambda$ de g .

**2.1** $\lambda$ étant une valeur propre de g, x appartenant à $E_\lambda(g)$, montrer que :g(f(x))= $\lambda$f(x) et en déduire que f(x) appartient à $E_\lambda(g)$.

**2.2** Nous supposons dans cette question que B admet une unique valeur propre $\lambda$

**2.2.1** Montrer que B=$\lambda I_3$, $I_3$ représentant la matrice identité.

**2.2.2** Justifier l'existence d'une matrice P inversible appartenant à $M_3$(IR) telle que les matrices $P^{-1}$ A P et $P^{-1}$ B P soient diagonales.

**2.3** Nous supposons dans cette question que B admet trois valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$

**2.3.1** $\lambda$ étant une valeur propre de B, quelle est la dimension de $E_\lambda(g)$ ?.

**2.3.2** $\lambda$ étant une valeur propre de B, x un vecteur non nul appartenant à $E_\lambda(g)$,montrer qu'il existe un réel $\mu$ tel que f(x)= $\mu$x.

**2.3.3** Montrer alors l'existence d'une base de E constituée de vecteurs propres communs à f et g.

**2.4** Supposons dans cette question que B admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2$.

**2.4.1** Montrer que $E = E_{\lambda_1}(g) \oplus E_{\lambda_2}(g)$.

**2.4.2** $\mu$ désigne une valeur propre de f. Soit x appartenant à $E_\mu(f)$, justifier l'existence de $x_1$ appartenant à $E_{\lambda_1}(g)$ et $x_2$ appartenant à $E_{\lambda_2}(g)$ tels que x = $x_1$ + $x_2$ ,puis montrer que $x_1$ et $x_2$ appartiennent à $E_\mu(f)$.

**2.4.3** $\mu$ désigne toujours une valeur propre de f. Montrer alors que :

$$E_\mu(f) = (E_{\lambda_1}(g) \cap E_\mu(f)) \oplus (E_{\lambda_2}(g) \cap E_\mu(f)).$$

En déduire l'existence d'une base de $E_\mu(f)$ constituée de vecteurs propres de g.

**2.4.4** En déduire l'existence d'une base de E constituée de vecteurs propres communs à f et g.

**EXERCICE 3**

**1°)** Pour tout $(P, Q) \in (IR[X])^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ . Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur IR[X].

**2°)** n désigne un entier naturel non nul. Montrer l'existence de $\delta_n = \min\limits_{(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in IR^n} \int_0^1 \left| t^n - \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \right|^2 dt$ .

On notera $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ un élément de $IR^n$ en lequel ce minimum est atteint.

**3°) a)** Montrer que, pour tout $h \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\int_0^1 t^h (t^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k) dt = 0$ .

**b)** Pour n=2, calculer $a_0$ , $a_1$ puis $\delta_2$ .

**4°)** Posons $F(X) = \frac{1}{X+n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X+k+1}$ .

**a)** Calculer F(h) pour tout $h \in \{0, \ldots, n-1\}$ .

**b)** Exprimer $\delta_n$ à l'aide de F.

**c)** Calculer F en fonction de n.

**d)** Calculer $\delta_n$ en fonction de n.